$\mathbb{R}$ ist mit zwei Operationen versehen;

Addition $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto x \cdot y$$

Axiome der Addition

A1 Assoziativität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$

A2 Neutrales Element: $\exists\, 0 \in \mathbb{R} : x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

A3 Inverses Element: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$

A4. Kommutativität: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$

* In A3 ist y eindeutig bestimmt und mit $-x$ bezeichnet

26.2.25

Axiome der Multiplikation

M1 Assoziativität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) z = x \cdot (y \cdot z)$

M2 Neut. Element: $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \cdot 1 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

M3 Inv. Element: $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1$.

M4. Komm.: $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$

* In M3 ist y eindeutig bestimmt und mit x^{-1} bezeichnet.

D: Distributivität $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper

$(\mathbb{R}, +)$ ist eine Abelsche Gruppe

$(\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Abel. Gruppe.

$\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper.

Auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Ordnungrelation: $\leq$

Ordnungsaxiome

O1) Reflexivität: $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \leq x$

O2) Transitivität: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O3) Antisymmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

O4) Total: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad x \leq y$ oder $y \leq x$

Die Ordnung ist konsistent mit Addition und Multiplikation

K1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

K2) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ (i.e $x \geq 0$) und $\forall y \geq 0: \quad x \cdot y \geq 0.$

Satz $\mathbb{R}$ ist ein angeordneter Körper, der Ordnungvollständig ist

Ordnungvollständigkeit unterscheidet $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$.

Ordnungsvollständigkeit:

Seien A, B Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass (vi) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

(vii) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ gilt: $a \leq b$

(d.h. alle Elemente von A links von allen Elementen von B sind)

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ so dass für alle $a \in A$, für alle $b \in B$ die Ungleichung $a \leq c \leq b$ gilt.

Bmk.: Die Existenz der Zahl c ist gewissermassen eine Versicherung, dass $\mathbb{R}$ keine "Lücken" hat.

Satz Für jedes $t \geq 0$ hat die Gleichung $x^2 = t$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Bmk.: Für $t \geq 0$ gibt es genau eine Lösung von $x^2 = t$ mit $x \geq 0$. Sie wird mit $\sqrt{t}$ bezeichnet

Archimedisches Prinzip:

1) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq nx$

2) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert genau ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x < n+1$.

Notation

2 Symbole

$+\infty$, $-\infty$

mit der Konvention

$$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ein Interval ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ der Form

(1) Für $a \leq b$ in $\mathbb{R}$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,

(a, b) oder $]a, b[$

$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$]a, b]$

(2) $a \in \mathbb{R}$

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.

$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$.

$\vdots$

(3) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Defn: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

(1) $c \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von A falls
$\forall a \in A ;\ a \leq c$.

Die Menge A heisst nach oben beschränkt falls es eine obere Schranke von A gibt

(2) $c \in \mathbb{R}$ ist eine untere Schranke von A falls
$\forall a \in A :\ c \leq a$

Die Menge A heisst nach unten beschränkt falls es eine untere Schranke von A gibt

(3) Ein Element $M \in \mathbb{R}$ heisst ein Maximum von A falls $M \in A$ und M eine obere Schranke von A ist.

d.h $M \in A$ und $\forall a \in A$
$a \leq M$.

Falls ein Maximum existiert schreiben wir $\max A$

(4) . . . . . $m \in \mathbb{R}$ heisst ein Minimum von A falls $m \in A$ und m ist eine untere Schranke von A ist.

$\min A$

⑤ Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$
heisst **beschränkt** falls
sie von oben und von
unten beschränkt ist.

Bsp. ① $A = [1, \infty) \subset \mathbb{R}$
nach unten beschränkt
nach oben unbeschränkt.
$\min A = 1$, kein Max.

② $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$
nach oben und nach
unten beschränkt.

Aber kein min
kein Max.

-1 ist eine untere Schranke

So ist -2, -2.1 ...

③ $A = (1, \infty)$.

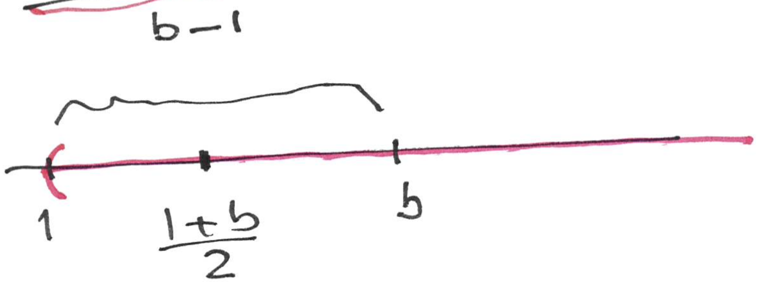
ist nach unten beschränkt
nach oben nicht.

1 ist eine untere Sch.
aber 1 ist nicht das min.
$1 \notin A$

A besitzt kein min!

d.h. es gibt kein $c \in A$
so dass $\forall a \in A$, $c \leq a$.

Beweis: Sei $b \in A$



dann $\frac{1+b}{2} \in A$

und $\frac{1+b}{2} < b$.

Da b ein beliebiges Element von A war, kein Element von A minimum von A sein kann.

A besitzt kein minimum.

Die Menge der Unteren Schranken von A

$U_A = (-\infty, 1]$

U_A besitzt ein Maximum

$\operatorname{Max} U_A = 1$

$B = [1, \infty)$

Die Menge der Unteren Schranken von B

$U_B = (-\infty, 1]$

U_B hat ein Max

$\operatorname{Max} U_B = 1$.

Satz 1.1.15 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$

$A \neq \emptyset$.

1) Sei A nach oben beschränkt.
Dann gibt es ein kleinste Obere Schranke von A

d.h es gibt $c \in \mathbb{R}$ s.d.

① $\forall a \in A$, $a \leq c$
(c ist eine obere Schranke)

② Falls $a \leq x$ $\forall a \in A$ ist,

$c \leq x$

(d.h. c ist kleiner als jede andere Obere Schranke.

Man bezeichnet $\boxed{c := \sup A}$, genannt das Supremum von A

② Sei A noch unten beschränkt. Dann gibt es ein grösste untere Schranke von A.

d.h es gibt $d \in \mathbb{R}$ s.t

① $\forall a \in A$, $a \geq d$

② Falls $a \geq x$ $\forall a \in A$

Dann $d \geq x$ ist.

d.h d ist grösser als jede andere untere Schranke.

d heisst das Infimum von A

$\boxed{d := \inf A}$

Bsp. $A := \left\{ \frac{2x}{x+3} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \end{array} \right\}$.

Ist $x > 0$, $\frac{2x}{x+3} > 0$

d.h A ist nach unten beschränkt, (0 ist eine unt. Sch.).

$$\frac{2x}{x+3} = \frac{2}{1+\frac{3}{x}} < 2.$$

d.h A ist nach oben beschränkt (2 ist eine Ob. Sch.).

Sup: 2 ist eine Ob. Sch.

Ist 2 schon die kleinste Obere Schranke?

Nehmen wir an dass es eine Obere Schranke gibt, c, s.d $c < 2$.

Dann. $0 < \frac{2x}{x+3} \leq c \quad \forall x > 0.$

$$2x \leq c(x+3)$$

$$(2-c)\,x \leq 3c, \quad \forall x > 0.$$

$$x = \frac{4c}{2-c}$$

$\Rightarrow \; 4c \leq 3c$

das ist unmöglich!.

$\boxed{\operatorname{Sup} A = 2}$.

Ist 2 ein Max?

d.h gibt es $x>0$ s.d.

$$2 = \frac{2x}{x+3}$$

$$2x + 6 = 2x$$

$$\Rightarrow 6 = 0 \; ! \; \lightning$$

2 ist kein Max!

<u>Inf</u> 0 ist eine untere Schranke

Ist 0 die grösste?

Wir nehmen an dass ein untere Schranke c gibt die, grosser als 0.

$$c > 0$$

und $\dfrac{2x}{x+3} \geq c \quad \forall x > 0.$

$$2x \geq c(x+3)$$

$$(2-c)x \geq 3c \quad \forall x > 0.$$

Falls $x = \dfrac{2c}{2-c}$

denn $2c \geq 3c \; \lightning$.

$$\Rightarrow 0 = \inf A.$$

0 ist kein min

da $\frac{2x}{x+3} = 0 \Rightarrow x = 0$

aber $x > 0$!

/in

Beweis (Satz 1.1.15)

Sei A die gegebene Menge, $A \neq \emptyset$.

Sei $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x$ ist eine Ob. Schr. von $A\}$.

Da A nach oben beschränkt ist, gilt $B \neq \emptyset$.

Per defn von B jede $b \in B$ erfüllt
$$a \leq b \quad \forall a \in A.$$

Beide voraussetzungen des Ordnungsvollständigkeitsaxiom. (V) sind erfüllt.

Dann $c \in \mathbb{R}$ gibt s.t
$$a \leq c \quad \forall a \in A$$
$$c \leq b \quad \forall b \in B.$$

Da $a \leq c \ \forall a \in A$, ist c eine Ober. Sch von A

d.h $c \in B$

Aus der ungleichung $c \leq b \ \forall b \in B$

folgt dass c ist die kleinste Obere Schranke von A ist!

∎

Bmk. ① Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkte Teilmenge. Dann stimmt die Menge der oberen Schranken von A mit dem Interval

$$[\sup A, +\infty)$$

überein.

② Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt.
Dann stimmt die Menge der Unt. Sch von A mit dem Interval

$$(-\infty, \operatorname{Inf}]$$

überein.

③ * Eine äquivalente Karakterisierung des Supremums

$S := \sup A$ ist die Bedingung.

$$\boxed{\{\forall a \in A \mid a \leq s\}} \hat{=}$$

S ist eine obere Schranke

$$\boxed{\{\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A \mid a > S - \varepsilon\}}$$

S ist die kleinste Ob. Sch.

d.h ~~für~~ jede Zahl $S-\varepsilon$ ist kein mehr ein Ob. Schranke

d.h $\exists a \in A$ s.t $a > S - \varepsilon$

④ $I := \operatorname{Inf} A$

$\boxed{\{\forall a \in A \mid a \geq I\}}$ $\wedge$

I ist ein unt. Sch.

$\boxed{\{\forall \varepsilon > 0 \mid \exists a \in A : a < I + \varepsilon\}}$.

I ist die Grösste U. Sch.
Jede grössere Zahl $I+\varepsilon$ als I ist keine untere Schranke.

Kor. 1.1.16 Seien $A \subset B \subset \mathbb{R}$ Teilmenge von $\mathbb{R}$.

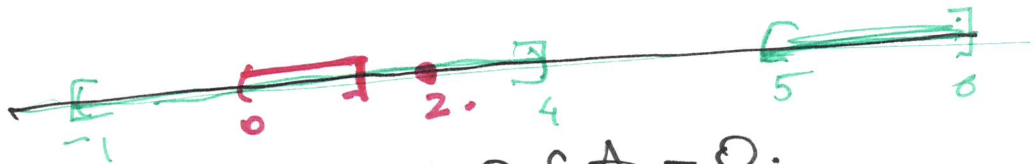
① Falls B nach oben ~~b~~eschränkt ist, folgt

$$\operatorname{Sup} A \leq \operatorname{Sup} B.$$

② Falls B nach unten beschränkt ist, folgt

$$\operatorname{Inf} B \leq \operatorname{Inf} A$$

Bsp. $A = [0,1] \cup \{2\}$
$B = [-1,4] \cup [5,6]$.



$-1 = \operatorname{Inf} B \leq \operatorname{Inf} A = 0.$
$2 = \operatorname{Sup} A \leq \operatorname{Sup} B = 6.$

Konvention: Falls A nicht nach oben beschränkt ist, (resp. nicht nach oben bes.). definieren wir

$$\boxed{\sup A = +\infty \qquad \inf A = -\infty.}$$

$$\boxed{\sup \emptyset = -\infty \qquad \inf \emptyset = \infty.}$$

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Bsp.

$$A = \left\{ 1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2}},\ \dots \right\}.$$

A ist nach unten beschränkt

$1 = \inf A = \min A.$

A ist nach oben unbeschränkt!

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{>\frac{1}{2}}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}\right)}_{\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}+\dots$$

$$> 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}+\dots$$

$$> 1+1+\dots$$

Andere Eigenschaften von Sup und Inf.

① Falls $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ gilt $a \leq b$ dann gilt

$$\operatorname{Sup} A \leq \operatorname{Inf} B$$

Bsp. $A = (1, 2)$
$B = (3, 4)$

$$2 = \operatorname{Sup} A \leq 3 = \operatorname{Inf} B.$$

② Für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ setzen $cA := \{ca \mid a \in A\}$

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Dann gilt:

(i) $\operatorname{Sup}\{A \cup B\} = \max\{\operatorname{Sup} A, \operatorname{Sup} B\}$.

(ii) $\operatorname{Sup}(A + B) = \sup A + \sup B$.

(iii) $\operatorname{Sup} cA = c \operatorname{Sup} A$ $c > 0$
$\operatorname{Sup} cA = c \operatorname{Inf} A$ für $c < 0$.

§1.2 Der Euklidische Raum.

Sei $n \geq 1$

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots x_n) \mid x_j \in \mathbb{R} \ \forall j = 1..n\}.$$

das n-fache kartesische Produkt

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}}.$$

$x = (x_1 \dots x_n)$, $y = (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$

$c \in \mathbb{R}$,

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$$

$$c \cdot x := (cx_1, \dots, cx_n)$$

skalar Multiplikation

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum

Das Skalarprodukt

von 2 Vektoren

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

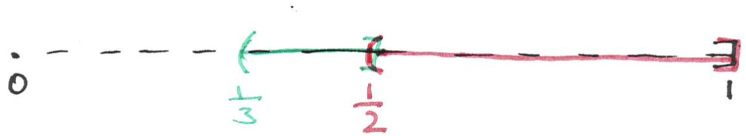
1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ Sym.
2. $\langle \alpha_1 x + \alpha_2 y, z \rangle$
   $= \alpha_1 \langle x, z \rangle + \alpha_2 \langle y, z \rangle$
   $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$
   Gleichheit $\Leftrightarrow$ $x = 0$.

Clicker Frage

$$A = \bigcup_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 1\right] \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup \dots$$

Dann $\sup A = 1 = \max A$



$\inf A = 0$, kein minimum

$\forall a \in A$, $a > 0 \Rightarrow 0$ ist eine untere Schranke

z.z 0 ist die grösste Unt. Sch.

d.h $\forall \varepsilon > 0$, $0+\varepsilon$ ist kein mehr eine Unt. Sch.

d.h $\exists a \in A : a < 0+\varepsilon$

Aus Arch. Prinzip erhalten wir dass: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$

Aber dann gilt: $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$

d.h $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t

$$\frac{1}{n} \leq \varepsilon = 0 + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Da $\frac{1}{n} \in A$ ist, ist $0+\varepsilon$ kein untere Schranke von A

d.h 0 ist die grösste untere Schranke von A

Da $0 \notin A$, das Minimum wird nicht erreicht